Le développement d'une fonction en série de Fourier

Théorème de Fourier :

Soit g(t) une fonction périodique, de période T (de fréquence f=1/T), continue sur tout intervale $[t_0\ ,\ t_0+T]$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce) et dérivable sur cet intervalle ; g(t) peut se décomposer en une somme infinie de fonctions sinusoïdales dont les fréquences sont des multiples de celle de la fonction g :

$$g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(2\pi nft) + B_n\sin(2\pi nft))$$

Nota :

- A_n (resp. B_n) est l'amplitude du cosinus (resp. du sinus) de rang n.
- A_0 correspond à la valeur moyenne de g(t) sur une période.
- La série de Fourier est convergente sur **R**.

Calcul des coefficients :

a/ On calcule A_0 en intégrant g(t) :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T} A_0\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T}(A_n\cos(2\pi nf) + B_n\sin(2\pi nft))\,dt = A_0.\int_{t_0}^{t_0+T} dt = A_0.T$$

en effet,

$$\int_{t_0}^{t_0+T}(A_n\cos(2\pi nf) + B_n\sin(2\pi nft))dt = A_n\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(2\pi nft)\,dt + B_n\int_{t_0}^{t_0+T}\sin(2\pi nf)\,dt = 0$$

D'où : $A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)dt$; soit la valeur moyenne de la fonction g(t).

b/ Les coefficients An se calculent en intégrant (g(t).cos(2πpft)), avec $p \in N$

On obtient : $A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)\cos(2\pi nft)dt$

c/ Les coefficients Bn se calculent en intégrant (g(t).sin(2πpft)), avec $p \in N$

On obtient : $B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)\sin(2\pi nft)dt$

Remarques :

a/ La parité de la fonction simplifie le développement :

Lorsque g(t) est paire, Bn = 0 pour tout n > 0 ; les termes en sinus disparaissent.

Si g(t) est impaire, alors An=0 pour tout n≥0 et donc les termes seuls restent les termes en sinus.

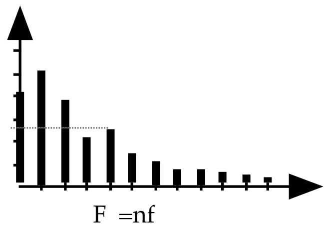
b/ Dans le cas d'un signal s(t) non périodique mais de durée finie T, on peut appliquer le théorème de Fourier en considérant la fonction g(t), de période T, définie par : $\forall t \in [0, T]$; $g(t) = s(t)$

c/ Si g(t) est une application complexe d'une variable t réelle, le théorème de Fourier devient :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi jnft}$$

Les coefficients sont alors $C_0 = A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)dt$ et $C_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)e^{2\pi jnft}dt$

d/ $h_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ est l'amplitude de l'harmonique de rang n ; la première harmonique (de rang 1) est liée à la fréquence fondamentale du signal f=1/T.
Le spectre de la fonction g se présente comme une suite de raies d'amplitude h_n aux fréquences F_n=nf = n/T, pour tout entier n ≥0.



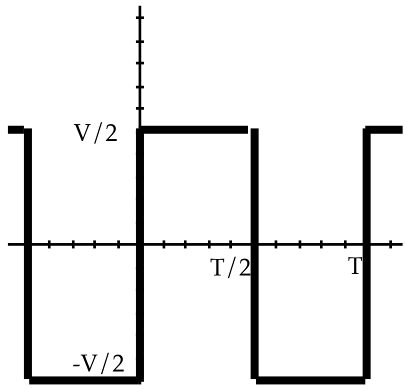
Exemples :

a/ Soit la fonction périodique, de période T, définie par :

$\forall t \in \left]0, \frac{T}{2}\right[$, $g(t) = V/2$

$\forall t \in \left]\frac{T}{2}, T\right[$, $g(t) = -V/2$

t = 0 ou t=T/2 ==> g(t) = 0 ;



g est impaire ; son développement est donc :

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi nft)$$

avec $B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)\sin(2\pi nft)dt = \frac{2}{T} * \frac{V}{2} * \left(\int_0^{T/2}\sin(2\pi nft)dt - \int_{T/2}^{T}\sin(2\pi nft)dt\right)$

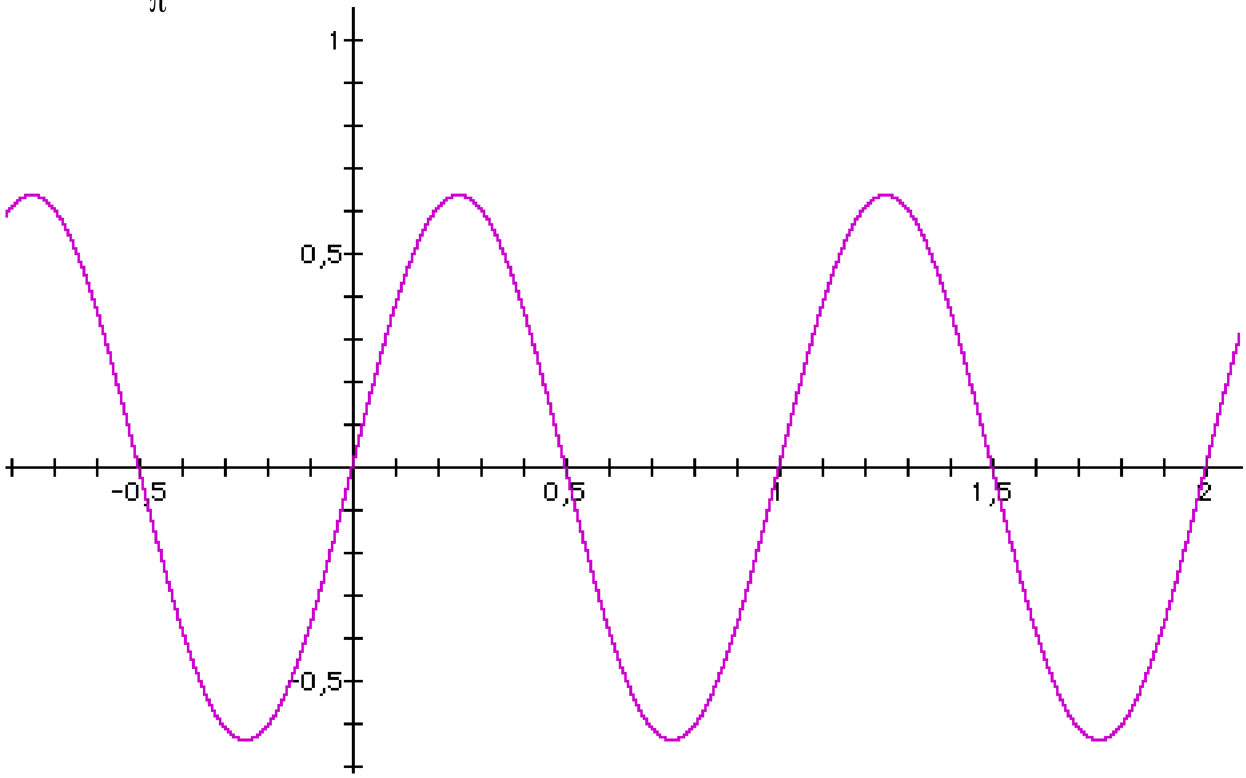
soit : $B_n = \frac{V}{T} 2 \int_0^{T/2}\sin(2\pi nft)dt = \frac{2V}{T}\frac{1}{2\pi nf}[-\cos u]_{u=0}^{n\pi}$

$$= \frac{V}{n\pi}(-\cos(n\pi) + 1) = \frac{V}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

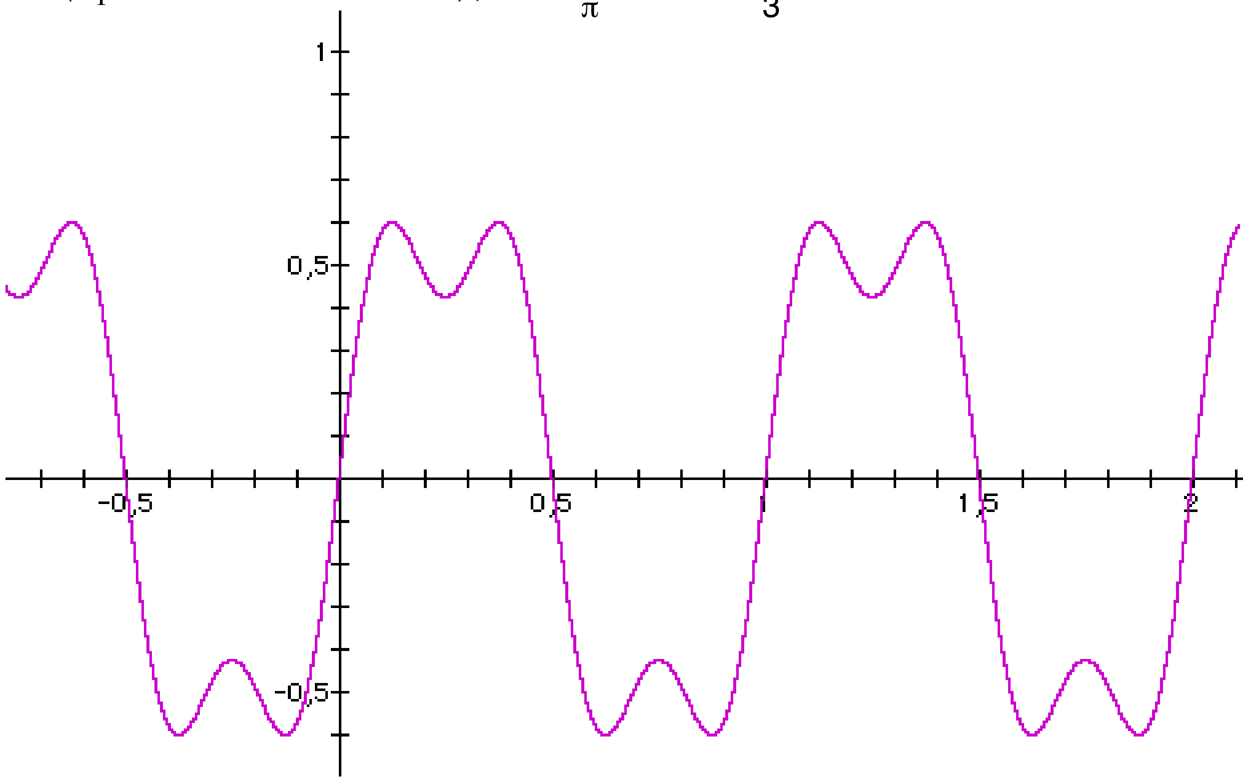
donc, $g(t) = \frac{2V}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2k+1}\cos(2\pi(2k+1)ft)$

$$= \frac{2V}{\pi}\left(\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3}\sin(6\pi ft) + \frac{1}{5}\sin(10\pi ft) + \frac{1}{7}\sin(14\pi ft) + ...\right)$$

n=1 ; $y = \frac{2}{\pi} \sin(2\pi t)$

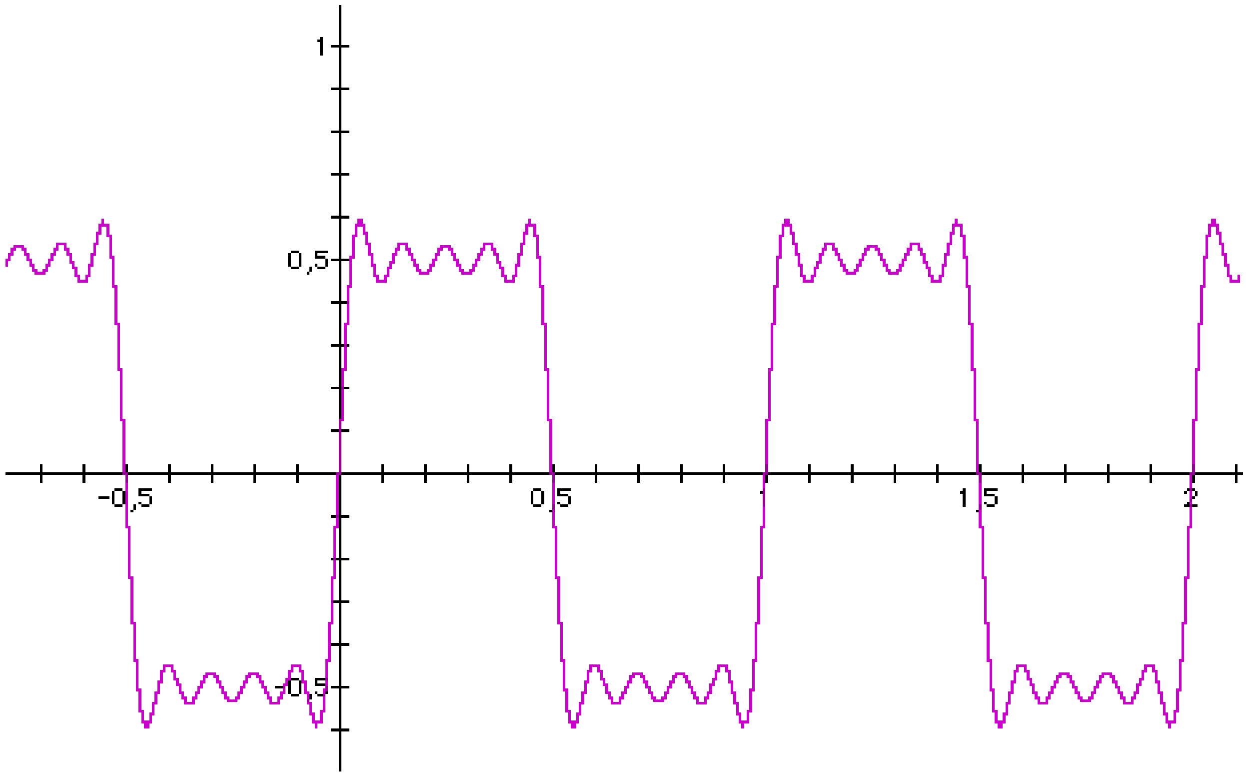


n=3 (2 premiers termes non nuls) ; $y = \frac{2}{\pi} (\sin(2\pi t) + \frac{1}{3}\sin(6\pi f t))$



n=9 ; 5 termes ≠ 0 :

$$y = \frac{2}{\pi}\left(\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x + \frac{1}{5}\sin 10\pi x + \frac{1}{7}\sin 14\pi x + \frac{1}{9}\sin 18\pi x\right)$$



n=17 ; 9 termes ≠ 0 :

$$y = \frac{2}{\pi}\left(\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x + \frac{1}{5}\sin 10\pi x + \frac{1}{7}\sin 14\pi x + \frac{1}{9}\sin 18\pi x + \frac{1}{11}\sin 22\pi x + \frac{1}{13}\sin 26\pi x + \frac{1}{15}\sin 30\pi x + \frac{1}{17}\sin 34\pi x\right)$$